www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ANNÉE 1990

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - coefficient : 7)

On veillera à justifier tous les résultats

1°) Dans tout le texte, le corps de base est celui des nombres réels.

2°) n, i, j, k désignent systématiquement des entiers positifs ou nuls.

3°) $\mathbb{R}(X)$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels; $\mathbb{R}_n(X)$ est le sous-espace de $\mathbb{R}(X)$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Par abus de langage, on identifie, lorsque c'est utile, un polynôme P, élément de $\mathbb{R}(X)$, et la fonction polynôme $x \longmapsto P(x)$ associée.

4°) Si x est un réel, E(x) représente la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif vérifiant : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

5°) Si f est une fonction dérivable à l'ordre n, sa dérivée d'ordre n est notée $f^{(n)}$; par convention, $f^{(0)} = f$. Ainsi, la dérivée première sera notée indifféremment f' ou $f^{(1)}$ et la dérivée seconde f" ou $f^{(2)}$.

6°) La partie I est à traiter en premier. Les parties II et III - indépendantes l'une de l'autre - utilisent les notations et les résultats de la partie I en vue de l'examen de problèmes particuliers. Cependant, les questions I-4°/ et I-5°/ ne sont pas indispensables pour l'étude des parties II et III .

PARTIE I

J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui peut, selon le cas, être de la forme [a,b] (a<b),]-∞,a], [a,+∞[ou]-∞,+∞[. La notation $\int_J f(x)\,dx$ désigne, lorsqu'elle existe, l'intégrale de f sur J .

$\mathring{J}$ est l'intérieur de J, c'est-à-dire que si J=[a,b], $\mathring{J}$=]a,b[; si J=]-∞,a], $\mathring{J}$=]-∞,a[; si J=[a,+∞[, $\mathring{J}$=]a,+∞[; enfin si J=$\mathbb{R}$, $\mathring{J}$=$\mathbb{R}$.

δ désigne une densité sur J. On appelle ainsi une application de J dans $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes:

i) δ est continue sur J ;

ii) $\forall x \in J,\ \delta(x) > 0$;

iii) $\forall P \in \mathbb{R}(X)$, l'intégrale $\int_J P(x)\,\delta(x)\,dx$ a un sens . On remarquera que iii) est conséquence de i) dans le cas où J=[a,b] .

T.S.V.P.

1°/ Pour tout couple $(P,Q) \in [\mathbb{R}(X)]^2$, on pose :

$$(P|Q) = \int_J P(x)\ Q(x)\ \delta(x)\ dx \ .$$

Montrer que l'application $(P,Q) \longmapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}(X)$, vérifiant de plus :

$$\forall\ (P,Q,R) \in [\mathbb{R}(X)]^3\ ,\ (RP|Q) = (P|RQ) \ .$$

2°/ Montrer, par récurrence sur n, l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $\{P_0\ ,\ P_1\ ,\ P_2\ ,\ldots,\ P_n\ ,\ldots\}$ satisfaisant aux propriétés suivantes:

i) le terme de plus haut degré (ou dominant) de P_n est X^n ;

ii) $(i \neq j) \Longrightarrow (P_i|P_j) = 0$.

iii) $\{P_0\ ,\ P_1\ ,\ P_2\ ,\ldots,\ P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n(X)$.

3°/ a) On fixe $n \geq 2$. Montrer l'existence de n réels $\{C_{n,0}\ ;\ C_{n,1}\ ;\ldots;\ C_{n,n-1}\}$ tels que :

$$P_n(X) = (X + C_{n,n-1})\ P_{n-1}(X) + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n,k}\ P_k(X) \ .$$

b) Montrer que si $0 \leq k \leq n-3$, alors $C_{n,k} = 0$. On emploiera la propriété $(RP|Q) = (P|RQ)$ du produit scalaire, avec un choix convenable de P, Q, R .

Exprimer $C_{n,n-2}$ à l'aide de $(P_{n-1}|P_{n-1})$ et de $(P_{n-2}|P_{n-2})$, en déduire $C_{n,n-2} < 0$.

On pose dans ce qui suit $C_{n,n-1} = \alpha_n$, $C_{n,n-2} = -\beta_n$ et on a donc, si $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (X + \alpha_n)\ P_{n-1}(X) - \beta_n\ P_{n-2}(X)\ , \quad \text{où } \beta_n > 0 \ .$$

4°/ L'objet de cette question est l'étude de la réalité des zéros de P_n lorsque $n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'ensemble des zéros de P_n, réels, appartenant à $\mathring{J}$ et d'ordre de multiplicité impair.

a) En considérant $(P_0|P_n)$, montrer que E_n est non-vide. On étudiera le signe de $P_n(X)$ sur J en supposant E_n vide, et on conclura à une contradiction.

b) Soit donc $E_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, où $1 \leq m \leq n$, avec $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$. On pose :

$$S_n(X) = \prod_{k=1}^{m} (X - u_k) \ .$$

.../...

En considérant $(S_n|P_n)$, montrer que l'hypothèse $m < n$ conduit à une contradiction, et en déduire que $m = n$.

c) Déduire de ce qui précède que les zéros de P_n sont tous réels, simples et appartenant à $\overset{\circ}{J}$.

5°/ On suppose $n \geq 2$. On note $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ les zéros de P_n avec $u_1<u_2<\ldots<u_n$, $\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$ ceux de P_{n-1} avec $v_1<v_2<\ldots<v_{n-1}$. Montrer, en utilisant I-3°/ , que, si $1 \leq i \leq n-1$, on a :

$$u_i < v_i < u_{i+1} \ .$$

On pourra raisonner par récurrence sur n .

Partie II

Dans cette partie, $J = [0,+\infty[$ et on pose : $\forall\, x \in J$, $\delta(x) = e^{-x}$.

L'objet de cette partie II est d'expliciter, avec cette densité particulière, la suite des polynômes P_n définie à la partie I .

1°/ Vérifier que δ satisfait aux conditions imposées à une densité.

2°/ On pose, si $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = x^n e^{-x}$, $\lambda_n = (-1)^n$,

et on définit les polynômes $\prod_n$ par l'égalité :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ , \ \prod_n(x) = \lambda_n e^x f_n^{(n)}(x) \ .$$

a) Quel est le terme de plus haut degré de $\prod_n$?

b) A l'aide d'intégrations par parties, calculer $(\prod_i|\prod_j)$ si $i \neq j$.

c) En déduire que $P_n = \prod_n$.

3°/ a) On utilise la question précédente pour expliciter P_n. On pose:

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^{n-k} \ .$$

Calculer $a_{n,k}$ et constater que c'est un entier relatif non nul.
Exprimer $a_{n,k}$ de préférence en fonction de $(-1)^k$, n! , k! ,(n-k)! .

b) Ecrire les expressions de $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$.

Calculer, par radicaux carrés s'il y a lieu, les zéros de P_1 et de P_2 et constater que les résultats sont bien conformes à ceux des questions I-4°/ et I-5°/ .

.../...

4°/ On pose $K_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx$. Calculer K_n en fonction de n .

5°/ Calculer $(P_n | P_n)$, qui s'exprime simplement à l'aide de n! .

6°/ Soit la relation :

$$P_n(X) = (X + \alpha_n) P_{n-1}(X) - \beta_n P_{n-2}(X) \quad , \quad (n \geq 2) .$$

a) Calculer β_n . Après simplification, vérifier que β_n s'exprime par un polynôme très simple en n .

b) Calculer α_n en donnant à X une valeur particulière. Le résultat s'exprime encore par un polynôme très simple en n.

7°) On exprime X^n dans la base $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ de $R_n(X)$ en écrivant que :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} P_{n-k}(X) \quad .$$

Calculer $b_{n,k}$ qu'on exprimera à l'aide de n!, k! et (n-k)! .
Comparer $b_{n,k}$ et $|a_{n,k}|$.
Vérifier, sur le résultat trouvé, que $b_{n,0} = 1$: était-ce prévisible ?

PARTIE III

Dans cette partie, $J = [-1, 1]$. On pose : $\forall x \in J$, $\delta(x) = 1$, et il est alors évident que δ est une densité au sens de la partie I. On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = (x^2-1)^n \quad ,$$

$$\lambda_n = \frac{n!}{(2n)!} \quad ,$$

et on définit les polynômes Π_n par l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \quad \Pi_n(x) = \lambda_n f_n^{(n)}(x) \quad .$$

1°) a) Quel est le terme de plus haut degré de Π_n ?
b) A l'aide d'intégration par parties, calculer $(\Pi_i | \Pi_j)$ si $i \neq j$.
c) En déduire que $P_n = \Pi_n$.

.../...

2°) On utilise la question précédente pour expliciter P_n .

a) Montrer que P_n est un polynôme pair si n est pair, impair si n est impair.

b) On pose, tenant compte de la parité :

$$P_n(X) = \sum_{k \geq 0}^{E(\frac{n}{2})} a_{n,k} X^{n-2k} \quad .$$

Calculer $a_{n,k}$. Exprimer $a_{n,k}$, de préférence à l'aide de $(-1)^k$, n!, k!, (2n)!, (n-k)!, (2n-2k)! et (n-2k)! .

c) Ecrire les expressions de $P_0(X)$, $P_1(X)$,$P_2(X)$,$P_3(X)$, dont les coefficients seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Calculer, par radicaux carrés s'il y a lieu, les zéros de P_1 , P_2 , P_3 et vérifier que les résultats sont bien conformes à ceux des questions I-4°/ et I-5°/ .

3°/ On pose : $J_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$.

Calculer J_n à l'aide d'une relation de récurrence. Le résultat s'exprimera en fonction de 2^{2n}, n! et (2n+1)! .

4°/ Calculer $(P_n|P_n)$, qu'on exprimera en fonction de 2^{2n+1}, n! , (2n)! et (2n+1)! .

5°/ Soit la relation :

$$P_n(X) = (X + \alpha_n) P_{n-1}(X) - \beta_n P_{n-2}(X) \quad , \quad (n \geq 2) \quad .$$

a) Calculer α_n à l'aide de considération de parité.

b) Calculer β_n . Après simplification, constater que β_n s'exprime par une fraction rationnelle très simple en n .

—=o()o=—

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail